Prof. Dr. Alfred Toth

Zur Bestimmung von Heteromorphismen und Risky Bridges

1. Die große Neuerung in der Kategorientheorie, die man Rudolf Kaehr verdankt, besteht in der Entdeckung der Heteromorphismen, d.h. Abbildungen der Form

$x \leftarrow y$,

wogegen Morphismen die Form

$x \rightarrow y$

haben:

Hence, what is new with the diamond approach to mathematical thinking is the fact, that, after 30 years of distributing and mediating formal systems over the kenomic grid with the mechanism of proemiality and tetradic chiasms, which goes far beyond "translations, embeddings, fibring, combining logics", I discovered finally the hetero-morphisms, and thus, the diamond structure, inside, i.e. immanently and intrinsically, of the very notion of category itself.

(Kaehr 2007, S. 30).

2. Allerdings hat Kaehr übersehen, daß man, um die Quadralexis von Abbildungen einer Kategorie $K = (x, y, \rightarrow, \leftarrow)$ zu erfüllen, auch den Heteromorphismus

$y \quad \leftarrow \quad x$

der konversen Abbildung

$y \quad \rightarrow \quad x$

benötigt. Daraus folgt weiter, daß ein Diamond mit Kreisfunktion (vgl. Toth 2025) der Form

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 2 & \leftarrow & 1 & & \\
 & & | & & | & & \\
1 & \rightarrow & 2 & \circ & 1 & \rightarrow & 3 \\
 & & | & & | & & \\
 & & 2 & \rightarrow & 1 & &
\end{array}$$

eines zweiten Diamonds mit Kreisfunktion der Form

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & \leftarrow & 2 & & \\
 & & | & & | & & \\
2 & \rightarrow & 1 & \circ & 2 & \rightarrow & 3 \\
 & & | & & | & & \\
 & & 1 & \rightarrow & 2 & &
\end{array}
$$

bedarf, um algebraisch im Sinne der Abbildungsquadralexis vollständig zu sein.

Da wir Diamonds aus den Relationen

$(\underline{1, 2}, 3)$

$(\underline{2, 1}, 3)$

konstruiert haben, können wir die Heteromorphismen aus den ersten beiden Relata gewinnen, indem wir den ← - Pfeil zwischen sie schreiben

$\xi_{123} = (1 \leftarrow 2)$

$\xi_{213} = (2 \leftarrow 1)$

Die beiden zur Quadralexis fehlenden Abbildungen der Kreisfunktionen erhält man dann einfach durch Umkehrung des Pfeils, d.h. durch die konversen Heteromorphismen

$\xi^{\circ}_{123} = (1 \rightarrow 2)$

$\xi^{\circ}_{213} = (2 \rightarrow 1)$.

3. Betrachten wir nun die komponierte Relation (1, 2, 3, 2, 1, 3) und konstruieren ihren Diamond (hier aus Gründen der Übersichtlichkeit ohne Kreisfunktionen).

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 3 & \leftarrow & 2 & & & & & & \\
 & & & & & & | & & | & & & & & & \\
 & & & & 1 & \leftarrow & 3 & & 2 & \leftarrow & 1 & & & & \\
 & & & & | & & | & & | & & | & & & & \\
 & & 2 & \leftarrow & 1 & & 3 & \leftarrow & 2 & & 1 & \leftarrow & 2 & & \\
 & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & \\
1 & \rightarrow & 2 & \circ & 1 & \rightarrow & 3 & \circ & 2 & \rightarrow & 1 & \circ & 2 & \rightarrow & 3,
\end{array}
$$

Wie man erkennt, haben wir zwei einander gleiche Risky Bridges (vgl. Kaehr 2007, S. 16; Toth 2009)

$\beta = (3 \leftarrow 2)$.

Wir können sie aus der dem Diamond zugrunde liegenden Relation vorab bestimmen, indem wir den ← - Pfeil zwischen die beiden mittleren Relata schreiben:

$$(\boxed{1 \quad \leftarrow \quad 2} \qquad 3 \quad \leftarrow \quad 2 \quad \leftarrow \quad 1 \qquad 3 \quad)$$

Die Domäne der Risky Bridge ist also gleichzeitig die Codomäne des rechten Heteromorphismus.

Literatur

Kaehr, Rudolf, The Book of Diamonds. Glasgow, U.K. 2007

Toth, Alfred, Semiotic “risky bridges” vs. “spagat” in 4-contextural tetradic semiotics. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2009

Toth, Alfred, Diamondtheoretische Kreisfunktionen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2025

20.5.2025